# Hoe belangrijk is lineaire algebra voor akoestiek en omgekeerd ?

Karl Meerbergen

9 februari 2007

# Overzicht

# Akoestiek

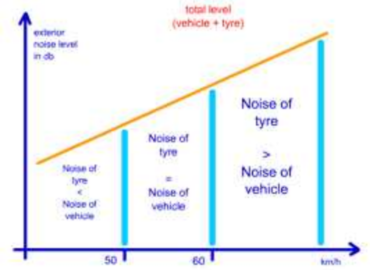
- Streven naar een stille omgeving
- Streven naar meer comfort
- Strengere geluidsnormen
- Belangrijk commercieel argument

# Numerieke lineaire algebra

- Analyse van matrices
- Algoritmes voor matrices
- Kern van grote simulatiecodes
- Veel geheugen, hoge rekentijd
- Complexe algoritmen

# Voorbeelden

- Autobanden




# Voorbeelden

- Vliegtuigen


# Voorbeelden

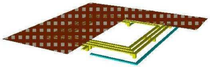
- Vensterglas voor auto's

  - Structurele demping
  - Keuze van de ophanging aan de carosserie

# Gelijkaardige applicaties

- Maxwell-vergelijking – elektrische circuits



- micro-gyroscoop voor navigatiesystemen

# Gelijkaardige applicaties

- Elastische structuren

# Waarom?

- Test van prototype is duur
- Testen vragen veel tijd.
- Wiskudige modellen worden beter
- Computers worden sneller
- Numerieke methoden worden beter
- Nieuwe methoden nodig om grotere problemen op te lossen op moderne computers

# Wat?

## Numerieke analyse

- Methoden
- Convergentie
- Numerieke stabiliteit

## Informatica

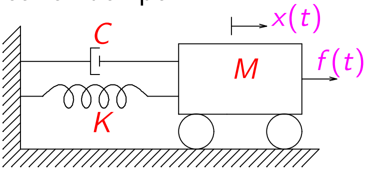
- Programmeertaal
- Architectuur
- Betrouwbaarheid
- Efficiëntie

## Toepassingen

- Ingenieur
- Fysica
- Scheikunde
- Economie
- Psychologie

# Gedempt massa-veersysteem

- Massa met veer en demper




- $M$ : massa
- $K$ : stijfheid
- $C$ : demping

# Frequentie-domein

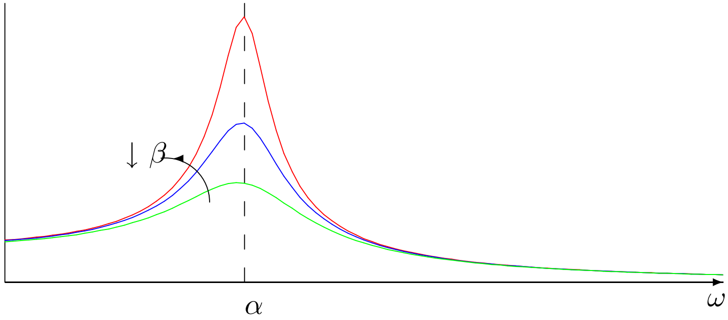
- Als $f$ een harmonische functie is (sinus, cosinus) met frequentie $\omega$, dan wordt $x$ na verloop van tijd ook harmonisch met frequentie $\omega$.
- $\mathbf{f}$ : amplitude van $f$
- $\mathbf{x}$ : (complexe) amplitude van $x$
- dan

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

- Algebraïsche vergelijking (frequentieresponsiefunctie)

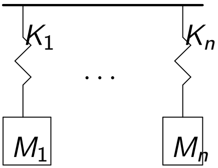
$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{f}}{K + i\omega C - \omega^2 M}$$

# Voorbeeld




Piek: $\omega = \alpha$ (resonantiefrequentie)

# Ongekoppelde massa-veersystemen



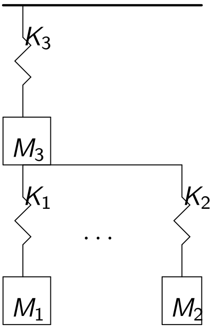

$$(K_j + i\omega C_j - \omega^2 M_j)x_j = f_j$$
$$\text{voor } j = 1, \ldots, n$$

In matrix-vorm :

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Diagonaal stelsel lineaire vergelijkingen

# Gekoppelde massa-veersystemen




$$\begin{bmatrix} K_1-\omega^2M_1 & 0 & -K_1 \\ 0 & K_2-\omega^2M_2 & -K_2 \\ -K_1 & -K_2 & K_3+K_1+K_2+\omega^2M_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

# Gekoppelde massa-veersystemen

$$\begin{bmatrix} K_1 - \omega^2 M_1 & 0 & -K_1 \\ 0 & K_2 - \omega^2 M_2 & -K_2 \\ -K_1 & -K_2 & K_3 + K_1 + K_2 + \omega^2 M_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

- Geen diagonaal stelsel meer
- Definieer

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 \\ 0 & K_2 & -K_2 \\ -K_1 & -K_2 & K_3 + K_1 + K_2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & M2 & \\ & & M_3 \end{bmatrix}$$

- $(K - \omega^2 M)x = f$

# Gekoppelde massa-veersystemen

- Bereken $x$ voor verschillende $\omega's$ waarbij een vaste $f$ gegeven is, bvb. een eenheidskracht op massa 3 :

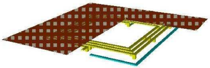
$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Methode: los voor iedere $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_m$ het stelsel op:

$$(K - \omega^2 M)x = f$$

- Kostprijs: $mn^3$

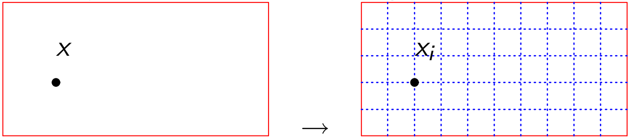
# Elektrische circuits



- Duizenden capaciteiten, weerstanden, inductanties gekoppeld in een complex systeem
- $(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$

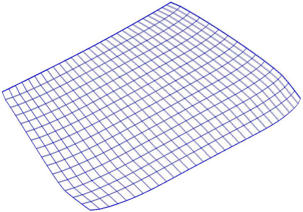
# Helmholtz-vergelijking

- Luchtdruk varieert continu met de positie in de ruimte.
- Ruimtelijke discretizatie via eindige elementen




- $(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$
- $K$, $C$ en $M$ zijn grote en ijle matrices.

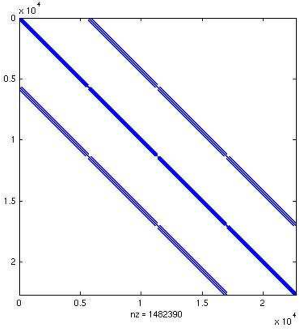
# Voorbeeld



- Model van een autovoorruit (Glaverbel voor BMW)
- Model met 3 lagen van $60 \times 30$ hexahedrale elementen.
- Structurele demping van 10%: $(K + 0.1iK - \omega^2 M)x = f$
- Puntbelasting op een hoek van de voorruit

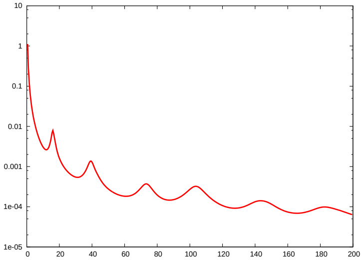
# Voorbeeld

- Matrices hebben orde $n = 22,692$
- Zeer ijle matrix



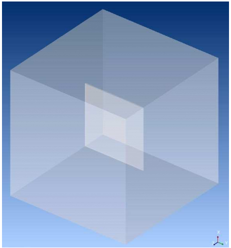
# Voorbeeld

- Frequentieresponsiefunctie




- Oplossen stelsel kost per frequentie 6.6s
- Voor 400 frequenties is dat 2653s
- Algebraïsche modelreductie: 26s

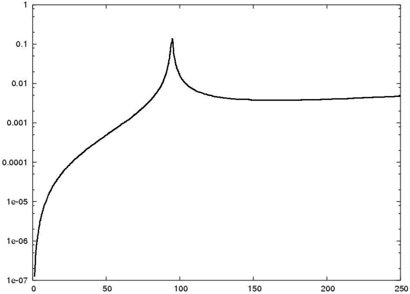
## Voorbeeld: vibro-akoestiek



- Kubus gevuld met lucht (bron: Free Field technologies)
- Binnenin bevindt zich een stalen plaat
- De zijden hebben ‘oneindige’ elementen voor radiatie naar oneindig
- Puntbeslasting op de plaat
- $n = 36,816$.

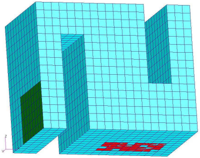
- Voor iedere frequentie:

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

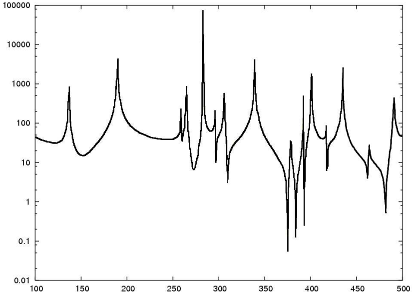



- Oplossen voor 250 frequenties kost 186 min.
- Algebraïsche modelreductie: 4.6 min.

# Voorbeeld: vibro-akoestiek



- Caviteit gevuld met lucht (bron: Free Field technologies)
- Op een zijde bevindt zich een acceleratie-randvoorwaarde
- Admittantie-randvoorwaarde die energie absorbeert
- $n = 27,236$




- Oplossen voor 400 frequenties kost 2938 s.
- Algebraïsche modelreductie: 283 s.

# Doelstelling

- Snel oplossen voor groot aantal $\omega$'s van

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

# Doelstelling

- Snel oplossen voor groot aantal $\omega$'s van

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

- Klassieke methode:
  Voor $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_m$:
  Los op:

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

## Doelstelling

- Snel oplossen voor groot aantal $\omega$'s van

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

- Klassieke methode:
  Voor $\omega = \omega_1, \ldots, \omega_m$:
  Los op:

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

- Oplossen door herkennen van structuur in het probleem

## Doelstelling

- Snel oplossen voor groot aantal $\omega$'s van

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

- Klassieke methode:
  Voor $\omega = \omega_1, \dots, \omega_m$:
  Los op:

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

- Oplossen door herkennen van structuur in het probleem
- Hercule Poirot: use the little grey cells

# Overzicht technieken

- Modelreductie voor

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$$

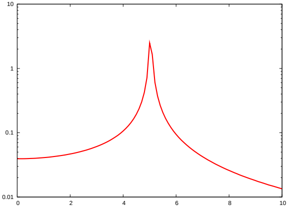
- Transformeer naar *ontkoppeld massa-veersysteem*.
- Benader $x(\omega)$ door een functie die goedkoper te berekenen is

# Ongedempt massa-veersysteem

- vergelijking: $(K - \omega^2 M)x = f$
- oplossing:

$$x = \frac{u_1}{\omega^2 - \lambda_1^2}$$

met $\lambda_1$ de resonantiefrequentie



# Ongedempt ontkoppeld massa-veersysteem

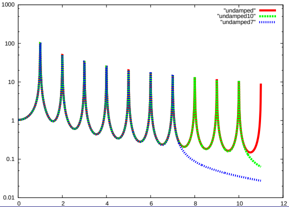
- oplossing:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j}{\omega^2 - \lambda_j^2}$$

met $\lambda_j$ de resonantiefrequenties

- Benadering:

$$x \approx \sum_{j=1}^{p} \frac{u_j}{\omega^2 - \lambda_j^2}$$



# Gekoppeld massa-veersysteem

- vergelijking: $(K + i\omega C - \omega^2 M)x = f$
- transformeer naar ontkoppeld systeem:

$$(\tilde{K} + i\omega\tilde{C} - \omega^2\tilde{M})\tilde{x} = \tilde{f}$$

- terugtransformatie : bereken $x$ uit $\tilde{x}$
- Nadeel: niet altijd mogelijk, soms duur
- Modale truncatie / modale superpositie

# Padé-benadering – modelreductie

- Altijd mogelijk, redelijk goedkoop
- $$x \approx \sum_{j=1}^{p} \frac{u_j}{\omega - \mu_j}$$
  waarbij $\mu_j$ geen eigenwaarden zijn, maar benaderingen van eigenwaarden
- Zodanig dat de $p$ eerste afgeleiden van $x(\omega)$ voor $\omega = 0$ overeenkomen met deze van de benadering.
- Praktisch : Krylov-methoden.

# Rayleigh-demping

- Vergelijking: $(K + i\gamma K - \omega^2 M)x = f$
- De $p$ eerste afgeleiden kan men uitrekenen via:

$$(K^{-1}M)^j K^{-1} f \quad \text{voor} \quad j = 0, \ldots, p-1$$

  in reëel rekenwerk (duur deel).
- De berekening van de Padé-coëfficiënten gebeurt in complex rekenwerk (goedkoop deel).
- Veel goedkoper dan de traditionele methode (complex rekenwerk).

# Conclusies

- Spitstechnologie uit de lineaire algebra kan akoestische numerieke simulaties aanzienlijk versnellen, of goedkoper maken.
- Specifieke problemen uit de akoestiek zijn een bron van inspiratie voor numerieke lineaire algebra.
- Belang van interdisciplinair werk